

Задача А. Хомячья раскраска

Пусть дана доска размера $n \times m$, которую требуется раскрасить диагонально в k цветов. Цвет клетки (i, j) определяется формулой

$$\text{color}(i, j) = ((i + j - 2) \bmod k) + 1,$$

то есть каждая диагональ с одинаковой суммой $i + j$ получает один цвет, а цвета циклически повторяются.

1. Остатки по модулю k

Рассмотрим остатки

$$r = (i - 1) \bmod k, \quad s = (j - 1) \bmod k.$$

Тогда

$$(i + j - 2) \bmod k = (r + s) \bmod k.$$

Следовательно, цвет клетки зависит только от пары остатков (r, s) .

2. Сколько строк и столбцов имеют каждый остаток

Для чисел $1, \dots, n$ остатки $(i - 1) \bmod k$ распределяются равномерно.

Пусть

$$n = q_n \cdot k + \text{rem}_n, \quad 0 \leq \text{rem}_n < k.$$

Тогда количество строк, чьи индексы имеют остаток r , равно

$$\text{rows}[r] = \begin{cases} q_n + 1, & r < \text{rem}_n, \\ q_n, & r \geq \text{rem}_n. \end{cases}$$

Аналогично для столбцов:

$$m = q_m \cdot k + \text{rem}_m, \\ \text{cols}[s] = \begin{cases} q_m + 1, & s < \text{rem}_m, \\ q_m, & s \geq \text{rem}_m. \end{cases}$$

3. Подсчёт количества клеток каждого цвета

Все клетки с остатками (r, s) дают вклад

$$\text{rows}[r] \cdot \text{cols}[s]$$

в цвет номер

$$t = (r + s) \bmod k.$$

Таким образом:

$$\text{ans}[t] += \text{rows}[r] \cdot \text{cols}[s].$$

После этого массив ans содержит:

$$\text{ans}[0] = \text{клеток цвета } 1, \quad \text{ans}[1] = \text{клеток цвета } 2, \dots$$

4. Временная сложность

Так как $k \leq 5$, перебор всех пар остатков (r, s) занимает не более 25 итераций — решение работает за $O(k^2)$.

Типы данных должны быть 64-битными, поскольку результат может достигать $4 \cdot 10^{18}$.

5. Полный код решения на Python

```
1 import sys
2
3 data = sys.stdin.read().strip().split()
4 n = int(data[0])
5 m = int(data[1])
6 k = int(data[2])
7
8 rows = [0] * k
9 qn, remn = divmod(n, k)
10 for r in range(k):
11     rows[r] = qn + (1 if r < remn else 0)
12
13 cols = [0] * k
14 qm, remm = divmod(m, k)
15 for s in range(k):
16     cols[s] = qm + (1 if s < remm else 0)
17
18 ans = [0] * k
19 for r in range(k):
20     for s in range(k):
21         t = (r + s) % k
22         ans[t] += rows[r] * cols[s]
23
24 for x in ans:
25     print(x)
```

Задача В. Магическая семёрка

Подзадача 1. [ПЕРЕБОРНОЕ РЕШЕНИЕ.]

Будем последовательно проверять числа начиная с 1, пока не будет найдено k -е подходящее число. Счётчик `count` отслеживает количество найденных магических чисел. Переменная n соответствует текущему натуральному числу. Условие $n \% 7 == 0$ or $n \% 10 == 7$ проверяет, является ли число n магическим. Цикл продолжается до тех пор, пока не будет найдено k -е магическое число.

Это решение работает для $n \leq 10^6$ и имеет сложность $O(n)$.

```
1 k = int(input())
2 count = 0
3 n = 0
4 while count < k:
5     n += 1
6     if n % 7 == 0 or n % 10 == 7:
7         count += 1
8 print(n)
```

Подзадача 2. [ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ.]

В этом решении применяются комбинаторные рассуждения и не используется перебор.

```
1 def count_magic_numbers(n):
2     return n // 7 + (n + 3) // 10 - (n + 63) // 70
3
4 def find_kth_magic_number(k):
5     left, right = 1, 10**18
6
7     while left < right:
8         mid = (left + right) // 2
9         if count_magic_numbers(mid) < k:
10             left = mid + 1
```

```
11         else:
12             right = mid
13         return left
14
15 k = int(input())
16
17 result = find_kth_magic_number(k)
18 print(result)
```

Функция `count_magic_numbers(n)` вычисляет количество магических чисел от 1 до n по формуле включений-исключений. Сначала подсчитываем количество чисел, кратных 7. Они образуют арифметическую прогрессию, их количество равно $n // 7$. Затем учитываем числа, оканчивающиеся на 7; они имеют вид $10k + 7$, их количество равно $(n + 3) // 10$. Наконец, подсчитаем количество чисел с обоими свойствами; эти числа имеют вид $70m + 7$, их количество равно $(n + 63) // 70$. Для того, чтобы избежать двойного учёта, вычисляем сумму первых двух величин за вычетом третьей.

Функция `find_kth_magic_number(k)` использует бинарный поиск для нахождения k -го магического числа. На каждой итерации эта функция проверяет, сколько магических чисел содержится в диапазоне $[1, mid]$. Если количество меньше k , сдвигает левую границу, иначе — правую. По завершении цикла `left` указывает на k -е магическое число.

Сложность этого решения $O(\log(\max_answer))$ — бинарный поиск по числам до 10^{17} , память $O(1)$ — используется константное количество памяти.

Это решение эффективно работает для больших значений k (до 10^{17}), так как использует только целочисленную арифметику и бинарный поиск.

Задача С. Нечётно-степенные числа

ПЕРВАЯ ПОДЗАДАЧА. Для небольших значений m и r задачу можно решить перебором. Будем проверять делимость конкретного числа n из промежутка $[l; r]$ на все числа i , начиная с $i = 2$ и до $i = n - 1$. Если при очередной проверке n не делится на i , пропускаем это значение i , а если делится, проверяем делимость на i ещё раз и так далее. Если n делится на i нечётное число раз, значит, этот множитель i входит в разложение n в нечётной степени. (Это число i будет также простым числом!) Затем переходим к следующему значению i . Таким образом, мы сможем установить, будет ли число n нечётно-степенным. Если количество нечётно-степенных чисел n в промежутке $[l; r]$ равно заданному m , получаем требуемый ответ.

ВТОРАЯ ПОДЗАДАЧА: Для значений $m \leq 10$ предыдущее решение можно улучшить. Дело в том, что если число n — составное, его наименьший простой делитель не превосходит $\sqrt{n}$, поэтому его простые делители можно найти за $O(\sqrt{n})$ операций. Для этого проверяем делимость конкретного числа n из промежутка $[l; r]$ на все числа i , не превосходящие $\sqrt{n}$. Такое решение проходит все тесты второй группы.

ТРЕТЬЯ ПОДЗАДАЧА. Улучшим решение для значений $m > 10$. Для этого нужно заметить, что если требуется найти последовательность из $m \geq 8$ подряд идущих нечётно-степенных чисел, ответ в задаче отрицательный, так как таких наборов нет. Действительно, восемь последовательных натуральных чисел дают различные остатки при делении на 8. Поэтому среди них найдётся число, которое при делении на 8 дает остаток 4. Это число делится на 4, но не делится на 8, поэтому в разложении его на простые множители двойка входит во второй степени. Другими словами, при $m > 7$ ответ в задаче -1, то есть не существует 8 последовательных нечётно-степенных чисел.

Задача D. Хомяк и двоичные тайны

ПЕРВАЯ ПОДЗАДАЧА. При $R \leq 2^{17}$ достаточно просто перебрать все числа x от 0 до R . Для каждого числа можно вручную получить двоичную запись делением на два: на каждом шаге вычисляем остаток $x \bmod 2$ и делим x на 2. Такое разложение занимает $O(\log x)$ времени. Подсчитав количество единиц в двоичном представлении числа x , проверяем условие $\text{popcount}(x) \equiv 0 \pmod{K}$. Общее время работы — $O(R \log R)$, что полностью укладывается в ограничения первой подзадачи.

ВТОРАЯ ПОДЗАДАЧА. При $R \leq 2^{25}$ количество чисел уже достигает $3 \cdot 10^7$, и ручное деление на 2 для каждого числа становится заметно медленнее. Однако современные языки программирования предоставляют готовые функции подсчёта количества установленных битов — `popcount`. Например:

- C++: `__builtin_popcount`, `__builtin_popcountll`;
- Java: `Integer.bitCount()`, `Long.bitCount()`;
- Python: метод `x.bit_count()`;
- C#: `System.Numerics.BitOperations.PopCount()`.

Эти функции реализованы на уровне процессора и работают за $O(1)$ на большинстве платформ. Поэтому решение сводится к простому перебору x от 0 до R , вызову `popcount` и проверке делимости. Такое решение работает за $O(R)$ и проходит вторую подзадачу.

ТРЕТЬЯ ПОДЗАДАЧА. В этой группе $R \leq 2^{44}$, и полный перебор x невозможен. Однако двоичная длина числа R не превосходит 44, и можно применить идею meet in the middle.

Пусть длина двоичной записи R равна $L \leq 44$. Разобьём её на две половины: младшие m бит и старшие $L - m$ бит. Запишем число x как

$$x = \text{hi} \cdot 2^m + \text{lo}.$$

Тогда

$$\text{popcount}(x) = \text{popcount}(\text{hi}) + \text{popcount}(\text{lo}).$$

Далее:

- переберём все значения `lo` (их 2^m), сгруппируем по количеству единиц;
- переберём все значения `hi`, для каждого найдём максимально возможное $\text{lo}_{\max}$, такое что $x \leq R$;
- по количеству единиц в `hi` определим требуемое количество единиц в `lo`, и найдём количество подходящих `lo` бинарным поиском.

Такое решение имеет асимптотику около $O(2^{L/2} \cdot L)$, что хорошо работает при $L \leq 44$.

ЧЕТВЁРТАЯ ПОДЗАДАЧА. При $R \leq 2^{63}$ двоичная длина не превосходит 63. Здесь оптимально использовать стандартное битовое ДП по двоичной записи R .

Пусть $b_0 b_1 \dots b_{n-1}$ — двоичная запись R (старший бит слева). Рассмотрим ДП

$$dp[i][r][t],$$

где:

- i — обработано первых i битов;
- r — остаток по модулю K от числа единиц;
- $t \in \{0, 1\}$ — флаг `tight`, равный 1, если префикс числа совпадает с префиксом R .

Переходы стандартны для digit-DP: если $t = 1$, то на текущем бите можно выбрать только биты $\leq b_i$, если $t = 0$, то можно выбирать 0 и 1 свободно. Количество единиц обновляется как $(r + \text{bit}) \bmod K$.

После обработки всех n битов искомым ответ равен

$$dp[n][0][0] + dp[n][0][1].$$

Сложность такого решения — $O(nK)$, что проходит четвертую группу.

ПЯТАЯ ПОДЗАДАЧА. В этой группе $R \leq 2^{127}$, и обычных 64 бит уже недостаточно. В C++ существует тип `__int128`, который позволяет хранить такие числа. Тогда можно:

1. прочитать R как десятичную строку;
2. перевести её в тип `__int128`;
3. извлечь двоичную запись с помощью сдвигов и `&1`;
4. выполнить битовое ДП, как в четвёртой подзадаче.

В других языках прямого аналога `__int128` нет:

- в **Java** есть класс `BigInteger` с методами `shiftRight`, `testBit`;
- в **Python** тип `int` поддерживает произвольно длинные числа, и можно использовать операции `>` и `& 1`. Однако у современных версий Python есть ограничение на максимальное число цифр строки, которое можно преобразовать в `int`. По умолчанию разрешено не более 4300 цифр; это параметр `sys.int_info.default_max_str_digits` (его можно увеличивать вызовом `sys.set_int_max_str_digits()`).
- в **C#** доступен класс `System.Numerics.BigInteger`.

Но в любом случае двоичная длина здесь не превышает 127 бит, поэтому битовое ДП работает очень быстро.

ШЕСТАЯ ПОДЗАДАЧА. Теперь $n \leq 200$ десятичных цифр, то есть двоичная длина числа R порядка 664 бит. $K \leq 200$, поэтому можно использовать битовое ДП, но требуется эффективно перевести R в двоичную систему.

Проще всего выполнить деление большой десятичной строки на 2: проходим по всем её символам слева направо, получаем частное и остаток. Остаток образует очередной бит результата. Повторяем до тех пор, пока строка не станет «0».

Время работы такой конвертации: $O(n \log R)$, что достаточно быстро при $n \leq 200$. Затем выполняется стандартное ДП по битам.

СЕДЬМАЯ ПОДЗАДАЧА. При $n \leq 2000$ двоичная длина достигает ~ 6644 бит, и хранить трёхмерное ДП $dp[i][r][t]$ уже слишком тяжело: память $\Theta(nK)$ может не поместиться.

Но для digit-DP по битам достаточно хранить только два слоя: текущий и следующий:

$$dp[r][t], \quad ndp[r][t].$$

После обработки каждого бита слои меняются местами, и ndp обнуляется. Это стандартная оптимизация «rolling array», и она позволяет уложиться как по времени, так и по памяти.

ВОСЬМАЯ ПОДЗАДАЧА. При $n \leq 5000$ конвертация десятичной строки в двоичное число с делением по одной цифре становится слишком медленной. Нужно ускорять операции над большими числами.

Строка R разбивается на блоки по 18 цифр (основание 10^{18}). Так получается массив целых 64-битных чисел:

$$R = a_0 \cdot 10^{18k} + a_1 \cdot 10^{18(k-1)} + \dots + a_k.$$

Деление большого числа на 2 выполняется уже по блокам: каждый блок делится как обычное 64-битное число, а остаток переносится в следующий блок. Количество блоков уменьшается примерно в 18 раз, и перевод становится существенно быстрее.

После получения двоичной записи выполняется ДП или комбинаторика (см. следующую подзадачу).

ДЕВЯТАЯ ПОДЗАДАЧА. При $n \leq 30000$ и $K \leq 100000$ переходы $O(nK)$ становятся слишком медленными. Здесь используется комбинаторный подход и корневая декомпозиция относительно параметра K .

Заметим, что существует естественный порог когда K большое, проще считать числа с точным количеством единиц.

Пусть длина двоичной записи R равна n , и рассмотрим значения s , кратные K :

$$s = 0, K, 2K, \dots, \quad s \leq n.$$

Для каждого такого s можно подсчитать количество чисел $x \leq R$ с $\text{popcount}(x) = s$ комбинаторно.

Рассмотрим двоичную запись $R = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$. Будем проходить её слева направо и следить, сколько единиц содержится в префиксе $R[0..i-1]$. Когда на позиции i стоит единица, у нас появляется вариант поставить в числа x на этой позиции ноль («уйти вниз» относительно R). После этого хвост из $(n-i-1)$ бит можно выбирать произвольно, но нужно поставить ровно

$$\text{need} = s - \text{cnt_ones}$$

единиц. Количество способов равно биномиальному коэффициенту

$$\binom{n-i-1}{\text{need}}.$$

Суммируя такие варианты для всех позиций, где R содержит единицу, а также учитывая само число R (если $\text{popcount}(R) = s$), получаем число всех $x \leq R$ с ровно s единицами.

Так как K большое, количество значений s имеет порядок $\frac{n}{K}$. Каждое вычисление занимает $O(n)$, всего сложность порядка

$$O\left(\frac{n^2}{K}\right),$$

что эффективно при большом K .

Именно поэтому в финальном решении применяется корневая декомпозиция:

$$\text{если } K^2 \leq n: \quad \text{выгодно ДП}; \quad \text{если } K^2 > n: \quad \text{выгодна комбинаторика}.$$

Такой гибрид полностью покрывает самую жёсткую девятую подзадачу.

Почему вообще гибрид «DP + комбинаторика» является оптимальным алгоритмом?

- При **маленьком** K выгодно использовать битовое ДП. Его сложность: $O(nK)$.
- При **большом** K выгодно использовать комбинаторный подход, так как количество подходящих значений s (таких что $s \equiv 0 \pmod K$ и $s \leq n$) равно $\frac{n}{K}$, поэтому общая сложность: $O\left(\frac{n^2}{K}\right)$.

Чтобы понять, какой метод быстрее, рассмотрим границу между ними. Ищем значение K , при котором оба варианта дают одинаковую сложность:

$$nK \approx \frac{n^2}{K} \implies K^2 \approx n \implies K \approx \sqrt{n}.$$

Тогда:

- Если $K^2 \leq n$ (то есть $K \leq \sqrt{n}$), то

$$nK \leq n\sqrt{n}, \quad \frac{n^2}{K} \geq \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n^{3/2},$$

значит **DP быстрее комбинаторики**.

- Если $K^2 > n$ (то есть $K > \sqrt{n}$), то

$$\frac{n^2}{K} \leq \frac{n^2}{\sqrt{n}} = n^{3/2}, \quad nK \geq n\sqrt{n},$$

значит **комбинаторика быстрее DP**.

Таким образом, порог $K \approx \sqrt{n}$ является разделителем между двумя методами. Именно поэтому итоговое решение использует правило:

если $K^2 \leq n$, применяем DP; иначе используем комбинаторику.

Итоговая сложность: $O(n \cdot \sqrt{n})$

Задача Е. Сказ о Луче Великой Справедливости

ПЕРВАЯ ПОДЗАДАЧА. При очень малом количестве комнат ($n \leq 2$) ответ всегда **Yes**. Действительно, любую одну или две осево-ориентированные комнаты всегда можно пересечь одной прямой: при необходимости достаточно провести прямую через одну из сторон или углов. Поэтому эта подзадача решается без вычислений.

ВТОРАЯ ПОДЗАДАЧА. Здесь требуется рассматривать только горизонтальные и вертикальные прямые. Горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает комнату $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ тогда и только тогда, когда $y_1 \leq y_0 \leq y_2$. Поэтому существование одной горизонтальной прямой, проходящей через все комнаты, эквивалентно непустоте пересечения всех отрезков $[y_1, y_2]$. Аналогично вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает все комнаты тогда и только тогда, когда пересечение всех отрезков $[x_1, x_2]$ непусто. Если хотя бы одно из двух пересечений непусто, ответ — **Yes**. Это решение работает за $O(n)$ и полностью покрывает вторую подзадачу.

ТРЕТЬЯ ПОДЗАДАЧА. Теперь, если ответ **Yes**, достаточно существования прямой под углом 45° или 135° . Для таких прямых удобно ввести новые координаты:

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Тогда прямая под углом 45° фиксируется параметром u , а под углом 135° — параметром v . Каждая комната задаёт интервал возможных значений u (или v), достигаемых в её углах. Поэтому задача сводится к проверке непустоты пересечения всех отрезков по u и затем по v . Если хотя бы одно из двух пересечений непусто, ответ — **Yes**. Это решение также линейно по n и покрывает третью подзадачу.

ЧЕТВЁРТАЯ ПОДЗАДАЧА. При $n \leq 200$ и ограничении $\sum n^3 \leq 3 \cdot 10^6$ можно позволить себе перебор всех «кандидатных» направлений прямой. В предельном положении подходящая прямая обязательно касается одного или двух углов некоторых прямоугольников. Поэтому достаточно перебрать все пары углов (всего $O(n^2)$ направлений), построить соответствующую прямую и проверить за $O(n)$, пересекает ли она все комнаты. Итоговая асимптотика $O(n^3)$ проходит условия четвёртой подзадачи.

ПЯТАЯ И ШЕСТАЯ ПОДЗАДАЧИ. При больших n полный перебор направлений уже слишком медленный, но можно воспользоваться геометрической структурой задачи.

Рассмотрим прямые положительного наклона. В предельном положении такая прямая проходит:

- ниже всех верхних левых углов комнат,
- выше всех нижних правых углов.

Пусть A — множество верхних левых углов, а B — множество нижних правых. Построим выпуклые оболочки этих множеств: A' (верхняя оболочка) и B' (нижняя оболочка).

Тогда для существования прямой положительного наклона, проходящей между всеми комнатами, необходимо и достаточно, чтобы оболочки A' и B' не пересекались. Интуитивно это отражает тот факт, что для любого наклона k верхняя граница допустимого положения прямой определяется оболочкой A' , а нижняя — оболочкой B' , и для существования прямой нужно, чтобы нижняя граница не поднималась выше верхней.

Проверить пересечение двух выпуклых ломаных можно за $O(n^2)$, что укладывается в ограничения пятой и шестой подзадач. Аналогичное рассуждение проводится для прямых отрицательного наклона (используются остальные два противоположных угла).

Седьмая подзадача. В полном решении требуется асимптотика $O(n \log n)$ при $\sum n \leq 4 \cdot 10^5$. Здесь используется та же геометрическая идея, но реализованная оптимально.

Как и ранее, рассматриваем три типа прямых: вертикальные, прямые с положительным наклоном и прямые с отрицательным наклоном.

- Для вертикальных прямых достаточно проверить непустоту пересечения всех отрезков $[x_1, x_2]$.
- Строительство выпуклых оболочек занимает $O(n \log n)$, а проверка их пересечения — линейное время (например, с использованием суммы Минковского или двухуказательного обхода). Аналогично для прямых отрицательного наклона.

Таким образом, итоговая асимптотика составляет $O(n \log n)$, что позволяет получить полный балл.